PART2　二項定理

2 ［1］ (1) $(1+x)^4$ を展開せよ。

(2) 次の等式を証明せよ。

(i) ${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^n$

(ii) ${}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-{}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+(-1)^n{}_n\mathrm{C}_n=0$

［2］ $(x+y-3z)^5$ の展開式における xy^2z^2 の係数を求めよ。

Point Pickup

$(a+b)^n$ の展開式の一般項は ${}_n\mathrm{C}_r\,a^{n-r}\,b^r$

$(a+b+c)^n$ の展開式の一般項は $\dfrac{n!}{p!q!r!}a^p\,b^q\,c^r$ （ただし $p+q+r=n$）

第１講　PART2　確認問題

1　$(1+x)^5$ を展開せよ。

$(1+x)^5$

$=x^5+$ [ア] x^4+ [イウ] x^3+ [エオ] x^2+ [カ] $x+$ [キ]

2　次の空欄に当てはまる式を求めよ。

$${}_n\mathrm{C}_0+4{}_n\mathrm{C}_1+4^2{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+4^n{}_n\mathrm{C}_n=\text{[ク]}$$

① 3^{n-1}　② 3^n　③ 3^{n+1}

④ 4^{n-1}　⑤ 4^n　⑥ 4^{n+1}

⑦ 5^{n-1}　⑧ 5^n　⑨ 5^{n+1}

3　次の式の値を求めよ。

$${}_5\mathrm{C}_0-\frac{{}_5\mathrm{C}_1}{2}+\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{4}+\cdots\cdots+(-1)^5\frac{{}_5\mathrm{C}_5}{2^5}=\frac{\text{[ケ]}}{\text{[コサ]}}$$

4　$(2x+y-z)^6$ の展開式における xy^2z^3 の係数を求めよ。

[シスセソ]

PART2　二項定理

2　[1]　(1)　$(1+x)^4$ を展開せよ。

(2)　次の等式を証明せよ。

(i)　${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots\cdots+{}_nC_n=2^n$

(ii)　${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+\cdots\cdots+(-1)^n{}_nC_n=0$

[2]　$(x+y-3z)^5$ の展開式における xy^2z^2 の係数を求めよ。

[1]　(1)　$(1+x)^4={}_4C_0+{}_4C_1x+{}_4C_2x^2+{}_4C_3x^3+{}_4C_4x^4$

$$=1+4x+\frac{4\cdot3}{2}x^2+\frac{4\cdot3\cdot2}{6}x^3+\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{24}x^4$$

$$=x^4+4x^3+6x^2+4x+1$$

(2)　$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+{}_nC_3x^3+{}_nC_4x^4+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n$　……①

(i)　等式①において，$x=1$ のとき

$$(1+1)^n={}_nC_0+{}_nC_1\cdot1+{}_nC_2\cdot1^2+{}_nC_3\cdot1^3+{}_nC_4\cdot1^4+\cdots\cdots+{}_nC_n\cdot1^n$$

よって　${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots\cdots+{}_nC_n=2^n$

(ii)　等式①において，$x=-1$ のとき

$$(1-1)^n={}_nC_0+{}_nC_1\cdot(-1)+{}_nC_2\cdot(-1)^2+{}_nC_3\cdot(-1)^3+{}_nC_4\cdot(-1)^4+\cdots\cdots+{}_nC_n\cdot(-1)^n$$

よって　${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+\cdots\cdots+(-1)^n{}_nC_n=0$

[2]　$(x+y-3z)^5=\{(x+y)-3z\}^5$ の展開式において，z^2 を含む項は

$${}_5C_2(x+y)^3(-3z)^2=90(x+y)^3z^2$$

さらに，$(x+y)^3$ の展開式において，xy^2 を含む項は

$${}_3C_2xy^2=3xy^2$$

したがって，xy^2z^2 の係数は　$90\times3=270$

(別解)

$(x+y-3z)^5$ の展開式において，xy^2z^2 の項は　$\dfrac{5!}{1!2!2!}xy^2(-3z)^2=270xy^2z^2$

よって，求める係数は　270

第1講 PART2 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：5，イウ：10，エオ：10，カ：5，キ：1

[解説]

$$(1+x)^5$$

$$={}_5C_0+{}_5C_1x+{}_5C_2x^2+{}_5C_3x^3+{}_5C_4x^4+{}_5C_5x^5$$

[A]

$$=1+5x+\frac{5\cdot4}{2}x^2+\frac{5\cdot4}{2}x^3+5x^4+x^5$$

$$=x^5+\mathbf{5}x^4+\mathbf{10}x^3+\mathbf{10}x^2+\mathbf{5}x+\mathbf{1}$$

[A] 二項定理

$$(a+b)^n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}_nC_nb^n$$

$(a+b)^n$ の展開式の一般項

$${}_nC_ra^{n-r}b^r$$

2 **[正解]** ク：⑧

[解説]

二項定理により

$$(1+x)^n$$

$$={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n$$ [A]

これに $x=4$ を代入すると

$$(1+4)^n$$

$$={}_nC_0+{}_nC_1\cdot4+{}_nC_2\cdot4^2+\cdots\cdots+{}_nC_n\cdot4^n$$

よって

$${}_nC_0+4{}_nC_1+4^2{}_nC_2+\cdots\cdots+4^n{}_nC_n=\mathbf{5^n}$$

3 **[正解]** ケ：1，コサ：32

[解説]

二項定理により

$$(1+x)^n$$

$$={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n \quad \text{[A]}$$

これに $x=-\dfrac{1}{2}$，$n=5$ を代入すると

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)^5={}_5\mathrm{C}_0+{}_5\mathrm{C}_1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+{}_5\mathrm{C}_2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+{}_5\mathrm{C}_5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^5$$

よって　$${}_5\mathrm{C}_0-\frac{{}_5\mathrm{C}_1}{2}+\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{4}+\cdots\cdots+(-1)^5\frac{{}_5\mathrm{C}_5}{2^5}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^5=\boldsymbol{\frac{1}{32}}$$

4 [正解] シスセソ：-120

[解説]

$(2x+y-z)^6=\{(2x+y)-z\}^6$ の展開式において，

z^3 を含む項は

$${}_6C_3\,(2x+y)^3\,(-z)^3=-20(2x+y)^3z^3$$ [A]

さらに，$(2x+y)^3$ の展開式において，xy^2 の項は

$${}_3C_2\cdot 2x\cdot y^2=6xy^2$$

よって，xy^2z^3 の係数は

$$-20\cdot 6=\mathbf{-120}$$

（別解）

$(2x+y-z)^6$ の展開式において，xy^2z^3 の項は

$$\frac{6!}{1!2!3!}\cdot 2x\cdot y^2\cdot(-z)^3=-120xy^2z^3$$ [B]

よって，求める係数は　$\mathbf{-120}$

[B]　$(a+b+c)^n$ の展開式の一般項

$$\frac{n!}{p!q!r!}a^p b^q c^r$$

（ただし，$p+q+r=n$）